

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ІНСТИТУТ  
ЕКОНОМІКИ І УПРАВЛІННЯ**

**Р.М.ЛІТНАРОВИЧ**

**ПРОЕКТ  
І ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ОСНОВИ  
ОБЛАСНОГО ЦЕНТРУ МЕТОДОМ ПАРНИХ  
ЛАНОК ЗАСІЧОК**

*Навчальний посібник з курсу  
“Основні геодезичні роботи”*

**Частина VI**

**Чернігів, 2001**

**УДК 378.147.31**

Літнарів Р.М. Проект і дослідження геодезичної основи обласного центру методом парних ланок засічок. Навчальний посібник з курсу “ Основні геодезичні роботи”. Частина VI. ЧДІЕУ, Чернігів, 2001, 35с.

Litnarovich R.M. Project and research of geodesic basis of regional center by the method of Pair links of locate . A train aid is from a course “ Basic geodesic works”. Part of VI. ChSIEM, Chernigiv, 2001, 35p.

Затверджено на засіданні вченої ради ЧДІЕУ, протокол №6 від 27.06.01.

Рецензенти : Боровий В.О. д.т.н., професор  
Войтенко С.П. д.т.н., професор  
Канівець В.І. д.с-г.н., професор

В даній роботі розроблена методика, яка дає можливість забезпечити необхідну точність.

Всі математичні викладки забезпечені необхідним математичним апаратом, який дає строге рішення даної проблеми. Роботу формул опробовано на фактичному цифровому матеріалі, розроблений комплект програм, який в польових умовах забезпечує повну камеральну обробку.

A method which enables to provide necessary exactness is developed in this work.

All of mathematical expositions are provided with a necessary mathematical vehicle which gives the strict decision of this problem. Work of formulas of is approved on actual digital material, the complete set of the programs, which in the field terms provides complete kameral treatment, is developed.

**© Літнарів Р.М., 2001**

## Зміст

Вступ.....	4
1. Постановка проблеми.....	5
2. Побудова моделі геодезичної основи, створюваної методом парних ланок засічок .....	6
3. Зрівноваження мережі корелатним способом.....	15
4. Побудова і зрівноваження мережі при виміряних кутах на пунктах.....	25
5. Розрахунок невиміряних кутів гама і координат в методі парних ланок засічок.....	29
6. Оцінки точності.....	31
Висновки.....	33
Література.....	34

## Вступ

Положення по земельно-кадастровій інвентаризації земель каселеніих пунктів [2] регламентує облікову одиницю площі в містах республіканського і обласного значенням, рівну 1 кв.м., для садово-городніх товариств 2,5 кв.м., у містах районного підпорядкування і селищах 15 кв.м., у селах 100 кв.м.

У зв'язку з цим виникає проблема забезпечення інвентаризації земель геодезичними роботами відповідної точності.

В навчальному посібнику з курсу "Методи наукових досліджень" [3] показано, що точність сучасних опорних мереж не може забезпечити точність визначення площ землекористувачів, рівну 1 кв.м.

В даних дослідженнях дається шлях для забезпечення даної облікової одиниці площі. На прикладі обласного центру створюється проект планової геодезичної основи і досліджується точність визначення координат пунктів методом статистичних випробувань Монте-Карло.

Пункти геодезичної основи проектуються на дахах висотних будинків. Ряд пунктів являють собою шпилі соборів, на які ведуть спостереження напрямків і які недоступні для встановлення на них теодоліта і вимірювання горизонтальних кутів. При цьому застосовується розроблений автором метод парних ланок засічок, який забезпечує визначення положення 9 пунктів з проведенням спостережень лише на 4 пунктах. В традиційних методах триангуляції, трилатерації, полігонометрії для визначення координат 9 пунктів слід проводити спостереження на 9 пунктах. Отже даний метод є більш ефективним.

Проблема полягає в досягненні відповідної точності.

В даній роботі розроблена методика, яка дає можливість забезпечити необхідну точність.

Всі математичні викладки забезпечені необхідним математичним апаратом, який дає строге рішення даної проблеми. Роботу формул опробовано на фактичному цифровому матеріалі, розроблений комплект програм, який в польових умовах забезпечує повну камеральну обробку.

### 1. Постановка проблеми.

На топографічній карті обласного центру масштабу 1:10 000 запроєктовано 9 пунктів опорної геодезичної мережі на дахах висотних будинків. Центральним пунктом А є опорний пункт на даху чотирнадцятиповерхового будинку. Передбачено вимірювання двох базисів між пунктами F і G, А і F.

Геодезичним транспортиром з точністю до  $0,5^\circ$  виміряні кути. За допомогою поперечного масштабу виміряна одна базисна сторона. По цим даним побудована модель опорної мережі. Тричі проводилося зрівноваження мережі. В кінцевому вигляді в даній мережі задовільняються всі умовні рівняння. Таку модель прийнято за істинну. Координати пунктів цієї моделі є істинними координатами, кути - істинними кутами, сторони - істинними сторонами. Побудова моделі приводиться в другій частині навчального практикуму.

В даній роботі генеруються середні квадратичні похибки вимірювання напрямків і кутів, рівні  $0,4''$ , методом найменших квадратів проводиться обробка матеріалів, строге зрівноваження по кутам і напрямкам і дається оцінка точності результатів.

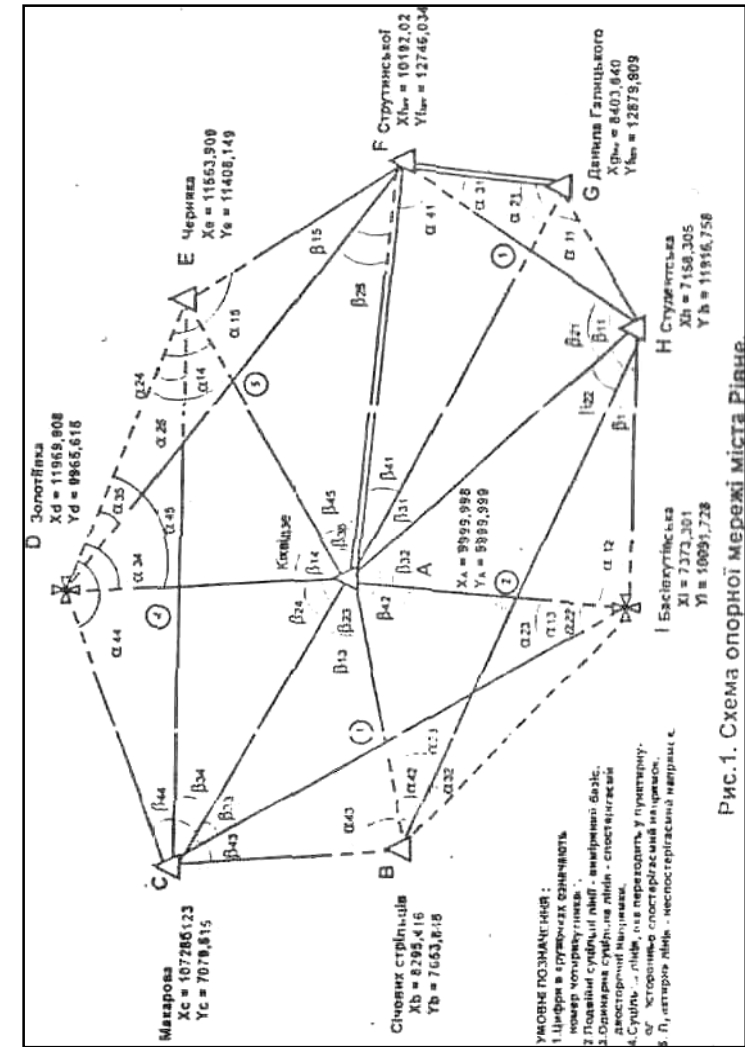


Рис.1. Схема опорної мережі міста Рівне.

### 2. Побудова моделі геодезичної основи, створюваної методом парних ланок засічок

За основу мережі взята модель триангуляції обласного центру, яка приводиться у другій частині посібника.

Таблиця 1. Побудова моделі опорної мережі обласного центру, для її створення методом парних ланок засічок Лігнаровича

№ п/п	Назва напрямку	Істинні значення кутів	Формули розрахунку кутів	Істинні значення кутів	Істинні похибки	Напрямки спотворення	Напрямки спотворення	Напрямки спотворення	Напрямки спотворення
1	HG	121°	$\beta_{11} = HG -$	71°43'08,1	+0,30"	120°59'59,1	$\beta_{11}$	71°43'07,5	$\beta_{11}$
2	HF	98°34'11,1	$\beta_{21} = HF -$	49°17'19,2	+0,12"	98°34'11,2	$\beta_{21}$	49°17'19,0	$\beta_{21}$
3	HA	49°16'51,8	$\beta_{31} = AH -$	27°00'00,0	+0,30"	49°16'52,1	$\beta_{31}$	26°59'59,2	$\beta_{31}$
4	HB	8°13'00,59'	$\beta_{41} = AH -$	60°00'00,0	+0,18"	8°13'00,77'	$\beta_{41}$	59°59'59,6	$\beta_{41}$
5	HI	0°00'00,00'	$S_{A_{hict}} =$	3427,70363		0°00'00,00'	SA	3427,699	SA
			$\beta_{12} = HA -$	49°16'51,8			$\beta_{12}$	49°16'52,1	$\beta_{12}$
6	AF	0°00'00,00'	$\beta_{22} = HA -$	41°03'51,29		0°00'00,00'	$\beta_{22}$	41°03'51,4	$\beta_{22}$
7	AG	33°00'00,0	$\beta_{32} = AI -$	32°00'00,0	+0,24"	33°00'00,2	$\beta_{32}$	32°00'00,3	$\beta_{32}$
8	AH	60°00'00,0	$\beta_{42} = AB -$	88°00'00,0	-0,34"	59°59'59,6	$\beta_{42}$	88°00'00,3	$\beta_{42}$
9	AI	92°00'00,0	$S_{B_{iict}} =$	2606,44090	-0,01"	91°59'59,9	SB	2606,441	SB
10	AB	148°00'00,00"	$\beta_{13} = AC - AI$	106°00'00,00"	-0,04"	147°59'59,06"	$\beta_{13}$	105°59'59,70"	$\beta_{13}$
11	AC	198°00'00,00"	$\beta_{23} = AC - AB$	50°00'00,00"	-0,31"	197°59'59,69"	$\beta_{23}$	49°59'59,73"	$\beta_{23}$

Продовження таблиці 1

12	AD	273°	$\beta_{33} = CI -$	34°04'52,43"	+0,36"	273°00'00,36"	$\beta_{33}$	34°04'51,94"	$\beta_{33}$
13	AE	316°00'00,00"	$\beta_{43} = CB -$	62°43'08,12"	+0,16"	316°00'00,16"	$\beta_{43}$	62°43'08,10"	$\beta_{43}$
			$S_{A_{iict}} =$	3009,771603			sAC	3009,78403	sAC
14	CD	0°00'00,00"	$\beta_{14} = AE -$	118°00'00,00"		0°00'00,00"	$\beta_{14}$	118°00'0,47"	$\beta_{14}$
15	CE	12°21'09,07"	$\beta_{24} = AB -$	75°00'00,00"	+0,03"	12°21'09,10"	$\beta_{24}$	75°00'00,67"	$\beta_{24}$
16	CA	371°51,88	$\beta_{34} = CA$	24°55'42,81"	+0,38"	37°16'52,26"	$\beta_{34}$	24°55'43,16"	$\beta_{34}$
17	CI	71°21'44,31"	$\beta_{44} = CA$	37°16'51,88"	-0,14"	71°21'44,17"	$\beta_{44}$	37°16'52,26"	$\beta_{44}$
18	CB	100°00'00,00"	$S_{D_{iict}} =$	1498,577703'	+0,36"	100°00'00,36"	sDE	1498,59292	sDE
			$\beta_{15} = FE -$	49°43'08,12"			$\beta_{15}$	49°43'08,15"	$\beta_{15}$
19	FA	0°00'00,00"	$\beta_{25} = FD -$	36°35'45,65"		0°00'00,00"	$\beta_{25}$	36°35'46,00"	$\beta_{25}$
20	ID	36°35'45,65"	$\beta_{35} = AF -$	44°00'00,00"	+0,35"	36°35'46,00"	$\beta_{35}$	43°59'59,84"	$\beta_{35}$
21	FE	49°43'08,12"	$\beta_{45} = AF -$	87°00'00,00"	+0,03"	49°43'08,15"	$\beta_{45}$	86°59'59,64"	$\beta_{45}$
			$S_{A_{iict}} =$	2752,7396			SAF	2752,768378	SAF
			$S_{A_{iict}} =$	1793,384984			SACT	2752,7396	SACT
							WB'	+ 28,8	WB'

Моделювання середньоквадратичних похибок вимірювання напрямків проводилося по розробленій автором програмі на основі оператора RND комп'ютера на мові BASIC.

Зв'язуючі сторони розраховувались по формулі

$$S_i = S_0 * \frac{t'_1 * t'_2 * t'_3}{t_1 * t_2 * t_3}; \quad (2.1)$$

де  $i = \sqrt{\left(\frac{1}{\text{ctg } \beta_{2i} + \text{ctg } \beta_{4i}} - \frac{1}{\text{ctg } \beta_{1i} + \text{ctg } \beta_{3i}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ctg } \beta_{2i}}{\text{ctg } \beta_{2i} + \text{ctg } \beta_{4i}} - \frac{\text{ctg } \beta_{1i}}{\text{ctg } \beta_{1i} + \text{ctg } \beta_{3i}}\right)^2}; \quad (2.2)$

індексами  $i$  позначаються номери геодезичних чотирикутників, у яких вимірюються кути  $\beta$ ;

$t_i$  - отримуються при рішенні задачі Ганзена;

$t'_i$  - при рішенні прямих кутових засічок.

Розрахунок зв'язуючих сторін проводиться на програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP - 175 по розробленій автором програмі. Необхідність створення даної програми виникла, у зв'язку із забезпеченням десятизначних цифр, чого не змогли дати вітчизняні мікрокалькулятори.

Програма №1 розрахунку зв'язуючих сторін геодезичних чотирикутників в методі парних ланок засічок (МПЛЗ).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
00	[X]	→D EG	tan	1/X	STO	5	[X]	→D EG	lan	1/X
10	STO	6	[X]	→D EG	tan	1/X	STO	7	[X]	→DE G
20	tan	1/X	STO	8	RCL	5	+	RCL	7	=
30	1/X	STO	9	RCL	6	+	RCL	8	=	1/X
40	STO	4	-	RCL	9	=	X	STO	3	RCL
50	9	X	RCL	5	=	STO	2	RCL	4	X
60	RCL	6	=	-	RCL	2	=	Л <sup>1</sup>	+	RCL
70	3	=	INV	√	STO	1	RCL	0	HLT	RCL
80	1	=	STO	0	HLT	INV	GOT	+/-	0	MOD

**Примітка: 1.** При наборі оператора 1/x калькулятор видає помилку E.

Після цього "необхідно натиснути клавішу ON. 2. Перед початком рахунку необхідно ввести початкову довжину сторони в нульовий регістр натиском клавіш STO 0.

Протокол №1 розрахунку зв'язуючих сторін

№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення	№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення
1	Mode 6			17	Run	-1-	
2	Mode 1			18	49°16'51,88"		$\beta_{12}$
3	1793,384984		$S_0 = S_{FG}$	19	Run	-2-	
4	STO 0			20	41°03'51,29"		$\beta_{22}$
5	Run 6	-1-		21	Run	-3-	
6	71°43'08,12"		$\beta_{1icm}$	22	32°00'00,00"		$\beta_{23}$
7	Run	-2-		23	Run	-4-	
S	49°17'19,24"		$\beta_{2i}$	24	88°00'00,00"		$\beta_{24}$

9	Run	-3-		25	H	3427.703634	$S_{AH}$		
10	27°00'00,00"		$\beta_{3i}$	26	B		Для прямої		
11	Run	-4 -		27	Run				
12	60°00'00,00"		$\beta_{4i}$	28		2606,440901	$S_{B1}$		
13	Run	1793,384984	$S_0 = S_{FG}$	29	Run	— 1			
14	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>o</td></tr><tr><td>o</td></tr></table>	o	o		В задачі Ганзена	.....	.....	.....	.....
o									
o									
15	Run								
16		3427,703634	$S_{AH}$						

Для зручності розрахунків розвернемо центральну систему в ряд геодезичних чотирикутників.

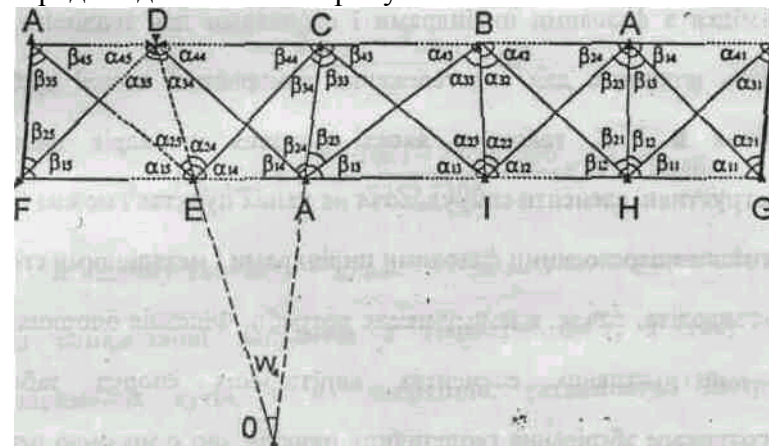


Рис 2. Схема опорної геодезичної мережі обласного центру, яка розгорнута в ряд геодезичних чотирикутників для ясності математичних викладок.

Кути  $\beta_{1i}$ ,  $\beta_{2i}$ ,  $\beta_{3i}$ ,  $\beta_{4i}$  розраховані по вимірним напрямкам з точністю 0,4'' на пунктах А, F, С, Н. На пунктах D, E, В, I, С не встановлювався теодоліт і напрямки не спостерігались. Таким чином, в даній мережі, яка складається із дев'яти пунктів вимірювання напрямків проводилося лише на чотирьох пунктах замість дев'яти пунктів традиційного методу триангуляції. З розробленим автором методом парних ланок засічок (МПЛЗ) не може конкурувати ні один із відомих методів (триангуляція, трилатерація, полігонометрія) відносно строків проведення польових робіт, так як в даному методі для конкретного міста і конкретної схеми більше ніж у два рази скорочується час проведення польових робіт по

спостереженню напрямків на пунктах. Крім цього на пунктах D і I немає необхідності будувати металічні пірамідки з фазовими циліндрами і столиками для теодоліта, так як замість циліндрів для спостереження використані шпилі храмів. На пунктах В і Е, також в якості фазових циліндрів використані конструктивні елементи споруд, хоча на даних пунктах і можна будувати пірамідки з переносними фазовими циліндрами і металічними столиками для теодоліта, однак в цьому немає потреби. Фіксація опорних пунктів на конструктивних елементах капітальних споруд забезпечить довготривале зберігання геодезичних пунктів, що є значною перевагою метода парних ланок засічок Літнаровича перед відомими методами створення геодезичної основи. Важливим елементом створення геодезичної основи є питання польового контролю. Головним польовим контролем на даній мережі парних ланок засічок є розрахунок вільного члена базисного умовного рівняння по розробленій автором програмі №1, який розраховується безпосередньо на останньому пункті спостереження після отримання горизонтальних кутів  $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, i = 1 \dots 5$ . Допустимий вільний член базисного умовного рівня розраховується по формулі

$$W_{\text{баз.дон.}} = 2,5m_{\beta} * \sqrt{\sum A^2}; \quad (2,3)$$

де  $m_{\beta}$  - середня квадратична похибка вимірювання кутів;

$A$  – коефіцієнти базисного умовного рівня, які розраховуються по програмі №2 для кожного геодезичного ботирикутника.

В нашому випадку отримуємо:

$$W_{\text{аз.факт.}} = 2,5m_{\beta} * \sqrt{377,055} = 2,5 * 0,4 * 19,418 = 19,42$$

Але для нашої моделі ми отримали:

$$W_{\text{аз.факт.}} = \frac{S_{AF.\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\delta}} - S_{AF.\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\delta}}}{S_{AF.\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\delta}}} * 10^6; \quad (2,4)$$

і

$$W_{\text{баз.факт.}} = \frac{2752,7684 - 2752,7396}{2752,7396} * 10^6 = 10,46.$$

В нашому випадку  $W_{\text{баз.факт.}} < W_{\text{баз.дон.}}$ , що говорить про те, що при вимірюванні напрямків з точністю 0,4", а таку точність вимірювання кутів, а не напрямків, регламентує Інструкція з полігонометрії 1 класу, ми забезпечимо необхідну точність передачі сторін в мережі парних ланок засічок. При цьому ми не враховували похибки вихідних базисів. З врахуванням похибок вихідних базисів допустимий вільний член базисного умовного рівня розраховується по формулі:

$$W_{\text{баз.дон.}} = 2,5m_{\text{напр.}} * \sqrt{(A * A) + (2 \frac{m_{\epsilon}}{\epsilon})^2}; \quad (2,5)$$

де  $\frac{m_{\epsilon}}{\epsilon}$  - відносна похибка вимірювання одного з двох базисів.

Зауважимо, що в даному методі не виникають умовні рівняння фігур і польовий контроль по формулі Ферреро не

виконується. А середня квадратична похибка розраховується на останньому пункту спостереження по результатам врівноваження за розробленою автором методикою.

$\beta_{42}$	80°00'00,30"	$\beta_{24}$	105°59'59,70"
$\beta_{32}$	32°00'00,33"	$\beta_{23}$	49°59'59,73"
$a=\langle BAI = \beta_{42} - \beta_{32}$	55°59'59,97"	$b=\langle BAI$	55°59'59,97"

$$W_1 = a - b = 0 \quad (3.4)$$

### 3. Зрівноваження мережі корелатним способом

При вимірюванні на пунктах кутів в даній мережі виникає чотири умовних рівняння. Два умовних рівняння суми кутів

$$(\beta_{42}) - (\beta_{32}) + (\beta_{23}) - (\beta_{13}) + W_1 = 0, \quad (3.1)$$

$$(\beta_{14}) - (\beta_{24}) - (\beta_{45}) + (\beta_{35}) + W_2 = 0, \quad (3.2)$$

де  $(\beta_{1i}), (\beta_{2i}), (\beta_{3i}), (\beta_{4i})$  - поправки у відповідні вимірні кути:

Одне умовне рівняння горизонту

$$(\beta_{41}) + (\beta_{32}) + (\beta_{23}) + (\beta_{35}) + W_3 = 0, \quad (3.3)$$

одне умовне рівняння базису.

Поскільки в одному параграфі розглядаються виміряні напрямки, а не кути, то умовних рівнянь суми кутів і горизонту не повинно бути. Відсутність даних умов і буде контролем побудованої моделі мережі.

$\beta_{14}$	118°00'00,47"	$\beta_{45}$	86°59'59,64"
$\beta_{24}$	75°00'00,67"	$\beta_{35}$	43°59'59,84"
$c=\langle DAI = \beta_{14} - \beta_{24}$	42°59'59,80"	$d=\langle DAE = \beta_{45} - \beta_{35}$	42°59'59,80"

$\beta_{41}$	59°59'59,66"
$\beta_{42}$	88°00'00,30"
$\beta_{23}$	49°59'59,73"
$\beta_{14}$	118°00'00,47"
$\beta_{35}$	43°59'59,84"
$\Sigma$	360°00'00,00"

$$W_3 = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{23} + \beta_{14} + \beta_{35} - 360^\circ \quad (3.6)$$

І в нашому випадку  $W_3 = 0$ .



Таким чином необхідні три умови задовільняються, що говорить про правильність побудови даної мережі.

Для виводу умовного рівняння базиса, або вихідної сторони, прологарифмуємо формулу (2.1), представивши її спочатку у вигляді:

$$S_n^2 = S_0^2 \frac{t'_1 * t'_2 * t'_3}{t_1 * t_2 * t_3} \quad (3.8)$$

$$2 \ln S_n = 2 \ln S_0 + \ln t'_1 + \ln t'_2 + \ln t'_3 - \ln t_1 - \ln t_2 - \ln t_3. \quad (3.7)$$

Диференціюючи формулу (3.7), отримаємо:

$$2 \frac{dS_n}{S_n} = 2 \frac{dS_0}{S_0} + \frac{dt'_1}{pt'_1} + \frac{dt'_2}{pt'_2} + \frac{dt'_3}{pt'_3} - \frac{dt_1}{pt_1} - \frac{dt_2}{pt_2} - \frac{dt_3}{pt_3}, \quad (3.8)$$

де  $p = 206265''$  – число секунд в одному радіані.

Як правило, похибкою вихідного базису нехтують, вимірюючи його на порядок вище, ніж всі другі виміри.

При цьому  $\frac{dS_0}{S_0} = 0$  і вираз (3.8) набуває вигляду:

$$\frac{dt'_1}{pt'_1} + \frac{dt'_2}{pt'_2} + \frac{dt'_3}{pt'_3} - \frac{dt_1}{pt_1} - \frac{dt_2}{pt_2} - \frac{dt_3}{pt_3} - 2 \frac{dS_n}{S_n} = 0 \quad (3.9)$$

або

$$\frac{dt'_1}{pt'_1} * 10^6 + \frac{dt'_2}{pt'_2} * 10^6 + \frac{dt'_3}{pt'_3} * 10^6 - \frac{dt_1}{pt_1} * 10^6 - \frac{dt_2}{pt_2} * 10^6 - \frac{dt_3}{pt_3} * 10^6 + W_{\text{в.в.}} = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{де } W_{\text{баз}} = \frac{S_{\text{кінц. розроб.}} - S_{\text{кінц. вимір.}}}{S_{\text{кінц. вимір.}}} * 10^6 \quad (3.11)$$

Формула (3.10) з врахуванням формул (3.11) і буде умовним рівнянням базиса в методі парних ланок засічок. Диференціюючи формулу (2.2), отримаємо:

$$dt_1 = \frac{2(1 + \text{ctg}^2 \beta_{1i})}{(\text{ctg} \beta_{1i} + \text{ctg} \beta_{3i})^2} * [\tau + q \text{ctg} \beta_{3i}] d\beta_{1i} + \frac{2(1 + \text{ctg}^2 \beta_{2i})}{(\text{ctg} \beta_{2i} + \text{ctg} \beta_{4i})^2} * [\tau + q \text{ctg} \beta_{4i}] d\beta_{2i} + \frac{2(1 + \text{ctg}^2 \beta_{3i})}{(\text{ctg} \beta_{1i} + \text{ctg} \beta_{3i})^2} * [\tau + q \text{ctg} \beta_i] d\beta_i + \frac{2(1 + \text{ctg}^2 \beta_{4i})}{(\text{ctg} \beta_{2i} + \text{ctg} \beta_{4i})^2} * [\tau + q \text{ctg} \beta_{2i}] d\beta_{2i}. \quad (3.12)$$

де

$$\tau = -\frac{1}{\text{ctg} \beta_{2i} + \text{ctg} \beta_{4i}} + \frac{1}{\text{ctg} \beta_{1i} + \text{ctg} \beta_{3i}}; \quad (3.13)$$

$$q = \frac{\text{ctg} \beta_{2i}}{\text{ctg} \beta_{2i} + \text{ctg} \beta_{4i}} - \frac{\text{ctg} \beta_{1i}}{\text{ctg} \beta_{1i} + \text{ctg} \beta_{3i}}; \quad (3.14)$$

Таким чином, ми отримали всі необхідні формули для визначення коефіцієнтів базисного умовного рівняння при створенні опорних геодезичних мереж методом парних ланок засічок.

По даним формулам розроблена автором програма на програмованому калькуляторі МК 61, яка за 2-3 хвилини розраховує коефіцієнти умовних рівнянь і їх суми для оцінки точності результатів. Програма не приводиться в даному навчальному посібнику по чисто комерційним причинам і передбачається заказчику разом із проектом любого міста любой держави.

**Таблиця 2. Коефіцієнти базисного умовного рівня для вимірних кутів і напрямків**

№ чотирикут. рик.	Назви поправок в кути	Коефіцієнт и при поправках в кути $dt * 10^6 / 2pt$	Назви поправок в напрямки	Розрахунок поправок в напрямки	Загальна поправка $\Sigma$
	(β11)	-(+1,2362)	(HG)	-1,2362	-1,2362
1	(β21)	+(-0,0231)	(HF)	+0,0231	+0,0231
	(β31)	+(-3,5015)	(HA)	+1,2362+1,01560,0231+4,4103	+6,639
	(β41)	-(+3,8867)	(HB)	-4,4103	-4,4103
	(β12)	+1,0156	(HI)	-1,0156	-1,0156
	(β22)	+4,4103	(AF)	-3,8867-3,9864+3,2166	-4,6565
2	(β32)	-3,6492	(AG)	+3,5015	+3,5015
	(β42)	+5,2559	(AH)	+3,8867+5,2559-3,5015 -3,6492	+1,9919
	(β13)	-(-2,3952)	(AI)	-5,8594+3,6492	-2,2102
3	(β23)	-(+4,3710)	(AB)	-5,2559+2,8319	-2,4240
	(β33)	+(-2,8319)	(AC)	+5,8594+2,6654-2,8319-5,0261	+0,6668
	(β43)	-(+5,8594)	(AD)	-2,6654+3,9864	+1,3210
	(β14)	+1,5733	(AE)	+5,0261-3,2166	+1,8095

4	(β24)	+5,2160	(CD)	-1,5733	-1,5733
	(β34)	-2,6654	(CE)	-5,2160	-5,2160
	(β44)	+5,0261	(CA)	+2,3959+1,5733+4,3710+5,2160	+13,5555
	(β15)	-(+3,9864)	(CI)	-4,3710	-4,3710
5	(β25)	+(-3,2166)	(CB)	-2,3952	-2,3952
	(β35)	-(+2,0074)	(FA)	+1,4975+2,0074	+3,5049
	(β45)	-(+1,4975)	(FD)	-2,0074	-2,0074
			(FE)	-1,4975	-1,4975

Спочатку по програмі розраховуються коефіцієнти для вимірянних кутів, а потім від поправок у вимірянні кути переходять до поправок у вимірянні напрямки, наприклад:

$$(\beta_{21}) = (HF)_{\text{правий}} - (HA)_{\text{лівий}} + 0,0231 = +0,0231_{(HF)} - 0,0231_{(HA)}$$

тобто правий напрямок кута р3і отримує поправку даного кута з його знаком, а лівий напрямок кута отримує ту ж поправку з протилежним знаком.

Таку процедуру виконують для кожного кута, а після збирають всі коефіцієнти по кожному напрямку. Замітимо, що для того геодезичного чотирикутника, в якому сторону розраховують із рішення задачі Ганзена, коефіцієнти умовних рівнянь міняють знаки на протилежні. В таблиці 2 вони показані в дужках. Якщо ланку ділимо на дві частини і проводимо зустрічне обчислення сторін, то при

зустрічному обчисленні коефіцієнти ще раз міняють знак на протилежний.

Єдина корелата в даному методі і для даної мережі розраховується по формулі:

$$K = -\frac{W_{\text{баз}}}{\sum A^2} \quad (3.16)$$

де А – коефіцієнти умовних рівнянь.

В нашому випадку

$$K = -\frac{2752.7684 - 2752.7396 * 10^6}{2752.7396} = -0.027747367$$

де сума квадратів коефіцієнтів по напрямкам складає 377,05573. Поправки в напрямки  $V_i$ , по результатам зрівноваження розраховують по формулі:

$$V_i = K * A_i, \quad (3.17)$$

де  $A_i$  - коефіцієнти умовного рівняння базиса для відповідного напрямку.

**Таблиця 3. зрівноважені напрямки, кути і зв'язуючі сторони. Контроль зрівноваження**

Назва напрямків	Коефіцієнти А поправок у виміряні напрямки	Поправки у виміряні напрямки V	Незрівноважені напрямки	Зрівноважені напрямки	Назви кутів	Зрівноважені кути і зв'язуючі сторони
HG	-1,2362	+0,03"	120°59'59,70 "	120°59'59,73 "	$\beta_{11}$	71°43'07,73"
HF	+0,0231	0	98°34'11,24"	98°34'11,24"	$\beta_{21}$	49°17'19,24"
HA	+6,6390	-0,18"	49°16'52,18"	49°16'52,00"	$\beta_{31}$	26°59'59,46"
HВ	-4,4103	+0,12"	8°13'00,77"	8°13'00,89"	$\beta_{41}$	59°59'59,47"
HI	-1,0156	+0,03"	0°00'00,00"	0°00'00,03"	$S_{AH}$	=3427,70790
AF	-4,6565	+0,13"	0°00'00,00"	0°00'00,13"	$\beta_{12}$	49°16'51,97"
AG	+3,5015	-0,10"	33°00'00,24"	33°00'00,14"	$\beta_{22}$	41°03'51,11"
AH	+1,9919	-0,06"	59°59'59,66"	59°59'59,60"	$\beta_{32}$	32°00'00,45"
AI	-2,2102	+0,06"	91°59'59,99"	92°00'00,05"	$\beta_{42}$	88°00'00,43"
AB	-2,4240	+0,07"	14°59'59,96"	148°00'00,03 "	$S_{BI}$	=2606,44385 5
AC	+0,6668	-0,02"	197°59'59,69 "	197°59'59,67 "	$\beta_{13}$	105°59'59,62 "
AD	+1,3210	-0,04"	273°00'00,36 "	273°00'00,32 "	$\beta_{23}$	49°59'59,64"
AE	+1,8095	-0,05"	316°00'00,16 "	316°00'00,16 "	$\beta_{33}$	34°04'52,41"
CE	-1,5733	+0,04"	0°00'00,00"	0°00'00,04"	$\beta_{43}$	62°43'08,55"

CA	-5,2160	+0,14"	12°21'09,10"	12°21'09,24"	$S_{AC}$	=3009,77593 5
CA	+13,5555	-0,38"	37°16'52,26"	37°16'51,88"	$\beta_{14}$	118°00'00,44 "
CI	-4,3710	+0,12"	71°21'44,17"	71°21'44,29"	$\beta_{24}$	75°00'00,65"
CB	-2,3952	+007"	100°00'00,36 "	100°00'00,43 "	$\beta_{34}$	24°55'42,64"
FA	+3,5049	-0,10"	0°0'00,00"	0°00'00,10"	$\beta_{44}$	37°16'51,54"

D	-2,0074	+0,06"	36°35'46,00"	36°35'46,06"	$S_{DE}$	=1498,5784 43
					$\beta_{15}$	36°35'46,16 "
FE	-1,4975	+0,04"	49°43'08,15"		$\beta_{25}$	36°35'46,16 "
	$\sum A^2 = 377,055$ 73				$\beta_{35}$	44°00'00,02 "
	$W = +10,462304$				$\beta_{45}$	86°59'59,81 "
K	-0,027747367				$S_{AF}$ $S_{AFIC}$	=2752,7386 04 =2752,7396

Таким чином, в результаті зрівноваження отримали значення  $S_{AF.зр} = 2752,7386$ , а істинне значення цієї сторони складає  $S_{AF.icm} = 2752,7396$ , тобто залишкова нев'язка складає +1мм, що визвано впливом залишкових істинних похибок.

Нев'язкою в один міліметр можна нехтувати, а результати зрівноваження слід вважати задовільними.

Для остаточного контролю перевіримо виконання сум кутів і горизонту.

$\beta_{42}$	88°00'00,43"	$\beta_{13}$	105°59'59,62"	
$\beta_{32}$	32°00'00,45"	$\beta_{23}$	49°59'59,64"	
$\alpha$	55°59'59,98"	$b$	55°59'59,9	$\beta_{23}$
	49°59'59,64"			
$W_1 = 0$				
$\beta_{14}$	118°00'00,44"	$\beta_{45}$	86°59'59,81"	
$\beta_{24}$	75°00'00,65"	$\beta_{35}$	44°00'00,02"	$\Sigma$
$c$	42°59'59,79"	$c$	$d$	42°59'59,79"
		$\beta_{41}$	105°59'59,62"	
		$\beta_{42}$	88°00'00,43"	
		$\beta_{23}$	49°59'59,64"	
		$\beta_{14}$	118°00'00,44"	
		$\Sigma$	360°00'00,00"	

$W_2 = 0$

$W_3 = 0$ .

Таким чином, врівноважена мережа задовільняє всім умовам.

#### 4. Побудова і зрівноваження мережі при вимірних кутах на пунктах

Поскільки в розглянутій вище моделі розглядалися вимірні напрямки, доцільно дослідити модель з вимірними кутами на пунктах.

При цьому, в розглянутій другій моделі вимірний лише один базис  $S_{FG}$ , а необхідна для зрівноваження сторона  $S_{AF}$  найдена із рішення трикутника AFH по визначеній стороні  $S_{FG}$  із рішення першого трикутника.

$$S_{AF} = S_{AH} * \frac{\sin \beta_{21}}{\sin[180^\circ - (\beta_{41} + \beta_{21})]} \quad (4.1)$$

і в такому випадку

$$S_{AF} = 3427.701665 * \frac{\sin 49^\circ 17' 19,40''}{\sin 109^\circ 17' 19,48''} = 2752,741059$$

Істина похибки сторони  $S_{AF}$ ,  $\Delta S_{AF} = 2752,741059 - 2752,739651 = +0,001408$  м при істинній довжині сторони 2752,739651.

Таблиця 4. Побудова моделі опорної мережі міста Рівне методом парних ланок засічок з вимірними кутами на пунктах

На- зв- и Ку-	Істинні значення кутів	Істин- ні Похи- б- Ки	Кути спотворе- ної Моделі (вимірні)	Коефіцієнти умовних				Попр- а- вки Врівн- о- важен	Зрівнова- сені кути
				a	b	c	dt/t		
				1	2	3	d		
				Су	Су	Сум	Баз		
				м.	м		иса		

$\beta_{11}$	71°43'08,12 "	+ 0.14"	71°43'08,2 6"	0	0	0	- (+0,5099 7)	+0,01	71°43'08,2 7"
$\beta_{21}$	49°17'19,24 "	+ 0.16"	49°17'19,4 0"	0	0	0	+(- 0,0095)	0	49°17'19,4 0"
$\beta_{31}$	27°00'00,00 "	+ 0.05"	27°00'00,0 5"	0	0	0	+(- 1,4445)	-0,04	27°00'00,0 1"
$\beta_{41}$	60°00'00,00 "	+ 0.08"	60°00'00,0 8"	0	0	+1	- (+1,6034)	-0,13	59°59'59,9 "
		$S_{AH} =$	3427.701 665					$S_{AH}$	3427,703 9
$\beta_{12}$	49°16'51,88 "	+0.35"	49°16'52,2 3"	0	0	0	+0,4189	-0,01	49°16'52,"
$\beta_{22}$	41°03'51,29 "	+0.36"	41°03'51,6 5"	0	0	0	+1,8194	-0,05	41°03'51,6 "
$\beta_{32}$	32°00'00,00 "	-0.14"	31°59'59,8 6"	-1	0	0	-1,5054	+0,06	31°59'59,9 2"
$\beta_{42}$	88°00'00,00 "	+0.38"	88°00'00,3 8"	+1	0	+1	+2,1682	-0,26	88°00'00,1 2"
		$S_{B1} =$	2606.454 66					$S_{B1} =$	2606,450 19
$\beta_{13}$	106°00'00,0 0"	+ 0.03"	106°00'00, 03"	-1	0	0	- (+2,417	+0,09	106°00'00, "
$\beta_{23}$	50°00'00,00 "	+0.16"	50°00'00,1 6"	+1	0	+1	+(- 1,1682)	-0,23	49°59'59,9 3"
$\beta_{33}$	34°04'52,43 "	+0.36"	34°04'52,7 9"	0	0	0	- (+1,803	+0,05	34°04'52,8 4"
$\beta_{43}$	62°43'08,12 "	-0.31"	62°43'07,8 1"	0	0	0	- (+0,988	+0,03	62°43'07,8 4"
		$S_{B1} =$	3009.785 568					$S_{B1} =$	3009,775 30
$\beta_{14}$	118°00'00,0 0"	+0.18"	118°00'00, 18"	0	+1	+1	+2,0734	+0,07	118°00'00, 2"
$\beta_{24}$	75°00'00,00 "	+0.30"	75°00'00,3 0"	0	-1	0	-1,0995	-0,28	75°00'00,0 2"
$\beta_{34}$	24°55'42,81 "	+0.12"	24°55'42,9 3"	0	0	0	+2,1517	-0,06	24°55'42,8 7"
$\beta_{44}$	37°16'51,88 "	-0.30"	37°16'51,5 8"	0	0	0	+0,6490	-0,02	37°16'51,5 6"
		$S_{DE} =$	1498.585 436					$S_{DE} =$	1498,582 59
$\beta_{15}$	49°43'08,12 "	-0.04"	49°43'08,0 8"	0	0	0	- (+0,617	+0,02	49°43'08,1 0"
$\beta_{25}$	36°35'45,65 "	-0.01"	36°35'45,6 4"	0	0	0	- (+0,828	+0,02	36°35'45,6 6"

$\beta_{35}$	44°00'00,00 "	- 0.34"	43°59'59,6 6"	0	+ 1	+ 1	- (+0,828)	+0,02	36°35'45,6 6"
$\beta_{45}$	87°00'00,00 "	+ 0.24"	87°00'00,2 4"	0	- 1	0	- (+0,828)	+0,02	36°35'45,6 6"

$$S_{AFd.вим} = 2752.741059$$

$$S_{AFd.вих} = 2752.741059$$

$$W_S = + 0.002735$$

$$W_S = + 0.0039м$$

В даному випадку умовне рівняння базиса представимо у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \frac{dt'_i}{t_i} - \sum_{i=1}^n \frac{dt_i}{t_i} + \frac{2p}{1} * \frac{S_{неви} - S_{неви}}{S_n} = 0 \quad (4.2)$$

$$W_{баз} = \frac{2 * 206264'' * 2,735_{мм}}{2752741,059_{мм}} = 0,410''$$

Таблиця 5. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	A]	B]	C]	D]	W	Σ
[A	4	0	+2	+7,259	+0,65	+13,909
[B		4	+2	+6,1443	-0,70	+11,4443
[C			5	+5,1333	+0,46	+14,5933
[D				42,8974	+0,41	+61,844

Таблиця 6. Рішення нормальних рівнянь по схемі Гаусса.

Перше рівняння суми кутів	Друге рівняння суми кутів	Умова горизонту	Умова базису	W	Σ	Контроль
4	0	+2	+7.259	+0,65	+13,909	
-1	0	-0.5	-1,81475	-0,1625	-3,47725	-3,47725
	4	+2	+6,1443	-0,70	+11,444	
	4	0	0	0	0	
	4	+2	+6,1443	-0,70	+11,4443	
	-1	-0,5	-1,536075	+0,175	-2,861075	-2,861075
		5	+5,1333	+ 0,46	+14,5933	
		-1	-3,6295	-0,325	-6,9545	
		-1	-3,07215	+0,35	-5,72215	
		+3	-1,56835	+0,485	+1,91665	
		-1	+0,52278 3	-0,161666	-0,638883	-0,638883
			42,8974	+0,41	+61,844	
			-	-1,179587	-	
			13,173270		25,241358	
			-9,438106	+1,075252	-	
					17,579303	
			-0,819907	+0,25355	+1,001993	
$K_1 =$ = - 0,0220241 7	$K_2 =$ = +0.307470	$K_3 =$ = - 0.1766848 9	+19,4661 77	+0,5592145	+20,02533 2	
			-1	-	-	
				0,02872758	1,0287276	1,0287276
			K<=-0,028727583			

Поправки у виміряні кути розраховуються по формулі:

$$V_i = a_i * k_i + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 \quad (4,3)$$

Хоча у даній моделі у результаті зрівноваження задовільняються умовні рівняння сум і горизонту, в результаті залишкового впливу істинних похибок добитися виконання умови базису у другій моделі не вдалось. Очевидно, порогом чутливості у другій моделі при зрівноваженні по кутам буде 2-3 мм. При цьому слід додатково враховувати корельованість кутів. Тому складні мережі, на основі даних досліджень слід зрівноважувати лише по напрямкам.

В подальшому будемо розглядати лише першу модель.

### 5. Розрахунок невимірних кутів гама і координат в методі парних ланок засічок.

Для розрахунку кутів, які не вимірялись, спочатку розраховується допоміжний кут омега в кожному чотирикутнику:

$$tg W_i = \frac{(ctg \beta_{1i} + ctg \beta_{3i}) - (ctg \beta_{2i} + ctg \beta_{4i})}{ctg \beta_{2i} ctg \beta_{3i} - ctg \beta_{1i} ctg \beta_{4i}}, \quad (5.1)$$

i

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1i} &= 180^\circ - \beta_{1i} + w_i \\ \gamma_{2i} &= w_i + \beta_{3i} \\ \gamma_{3i} &= \beta_{2i} + w_i \\ \gamma_{4i} &= 180^\circ - w_i - \beta_{4i} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

По даним формулам складена програма.

**Таблиця 7. Невимірні кути гама.**

Назва кутів	Значення кутів	Назва кутів	Значення кутів	Назва кутів	Значення кутів	Назва кутів	Значення кутів
$\gamma_{11}$	138°00'01,07"	$\gamma_{12}$	160°59'59,50"	$\gamma_{13}$	67°16'52,64"	$\gamma_{14}$	63°43'08,65"
$\gamma_{21}$	56°43'08,26"	$\gamma_{22}$	67°16'51,91"	$\gamma_{23}$	27°21'44,67"	$\gamma_{24}$	26°38'51,64"
$\gamma_{31}$	99°34'10,44"	$\gamma_{32}$	5°46'59,64"	$\gamma_{33}$	56°43'07,38"	$\gamma_{34}$	73°16'51,63"
$\gamma_{41}$	90°16'51,73"	$\gamma_{42}$	56°43'08,10"	$\gamma_{43}$	123°39'59,19"	$\gamma_{44}$	140°59'59,25"
$\gamma_{15}$	150°00'00,83"						
$\gamma_{25}$	63°43'09,14"						
$\gamma_{35}$	16°52'37,04"						
$\gamma_{45}$	73°16'51,07"						
Задаючись істинними значеннями координат пунктів F і G $X_{F.icm} = 10192.022$							
$Y_F = 12746.034$ $Y_F = 8403.641$ $Y_F = 12879.909$ розраховують координати останніх пунктів по формулам Юнга рішення прямих кутових засічок:							

$$X_c = \frac{X_B \operatorname{ctg} A + X_A \operatorname{ctg} B - Y_A + Y_B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \quad (5.3)$$

$$Y_c = \frac{Y_A \operatorname{ctg} B + Y_B \operatorname{ctg} A + X_A + X_B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \quad (5.4)$$

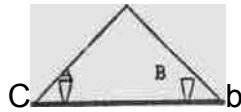


Рис.3. Схема засічки.

A - лівий пункт базиса, B - правий, C - визначасмній.

### 6 Оцінка точності.

Середня квадратична похибка одиниці ваги зрівноваженого напрямку:

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{r}} = \sqrt{\frac{0.2922}{1}} = 0.54''$$

Таблиця 8. Порівняльна таблиця зрівноважених та істинних координат пунктів.

Назва пункту	$X_{зр}$	$X_{іст}$	$fX_{мм}$	$Y_{зр}$	$Y_{іст}$	$fY_{мм}$
A	9999,998	10000,000	-2	9999,999	10000,000	-1
B	8295,416	8295,423	-7	7653,848	8653,851	-3

C	10728,123	10728,130	-7	7079,615	7079,631	-16
D	11969,908	11969,901	+7	9965,615	9965,615	0
E	11563,909	11563,909	0	11408,149	11408150	-1
F	10192.021	10192,021	0	12746,034	12746,034	0
G	6403.640	8403.640	0	12879.909	12879.909	0
H	7158.305	7158.305	0	11916.758	11916.748	+10
I	7373.301	7373.307	-6	10091.728	10091.726	+2

$$\sum f_x^2 = 187$$

$$\sum f_y^2 = 373$$

$$m_x = \sqrt{\frac{[f_x^2]}{n}} = \sqrt{\frac{187}{9}} = 4.56 \text{ мм}$$

$$m_y = \sqrt{\frac{[f_y^2]}{n}} = \sqrt{\frac{371}{9}} = 6.42 \text{ мм}$$

$$m_{x,y} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 7.87 \text{ мм}$$

Точність визначення кутів гама  $\gamma_{45} - \gamma_{34} = 0,56''$  ;

$$\gamma_{42} - \gamma_{33} = 0,72'' ; \gamma_{13} - \gamma_{22} = 0,73''$$

$\gamma_{14} - \gamma_{25} = -0,49''$ . Це і буде точністю дирекуйних кутів в мережі.



**Таблиця 9. Порівняльна таблиця зрівноважених та істинних зв'язуючих сторін.**

Назва сторони	$S_{зрівн.}$	$S_{іст.}$	fмм	Назва сторони	$S_{зрівн.}$	$S_{іст.}$	fSмм
АН	3427,7079	3427,7036	+4,3	DE	1498,578 4	1498,5777	+0,7
ВІ	2606,4438	2606,4409	+2,3	AP	2752,739 6	2752,7396	0
АС	3009,7759	3009,7716	+4,3				

Відносна похибка сторони в найбільш слабому місці складає:

$$f_{відн.АС} = \frac{4,3}{3009755,9} = \frac{1}{700000}$$

### Висновки

1. Розроблений проект планової геодезичної основи обласного центру, в якому при вимірюванні напрямків з точністю 0.4". кутів із точністю  $0,4\sqrt{2} = 5,6"$  забезпечується точність координат пунктів до 8мм,

2. Відносна похибка сторони в найслабшому місці мережі не перевищує 1/700000.
3. При побудові складних мереж слід вимірювати напрямки, а не кути, щоб не було корельованості останніх.

### Література

1. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. - М.: Недра, 1966, - 340с.
2. Положення по земельно-кадастровій інвентаризації земель населених пунктів. Київ, 1997,-14с.
3. Літнарвич Р.М. Дослідження точності геодезичних робіт для забезпечення облікової одиниці площі при інвентаризації земель. Навчальний посібник з курсу "Методи наукових досліджень". Частина 1. м. Рівне. УДАВГ, - 14с.

**Автор: Літнарівич Руслан Миколайович к. т. н., доцент**

**Комп'ютерний набір і редагування тексту у  
видавничому редакторі Word for Windows  
Останін Олександр Сергійович  
Хоменко Юлія Валентинівна**

**ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ  
ІНСТИТУТ  
ЕКОНОМІКИ І УПРАВЛІННЯ**

М. Чернігів

вул. Стрілецька,1

[URL:www.geci.cn.ua](http://www.geci.cn.ua)

E-mail:rector@geci.cn.ua

Тел.: (0462) 179-308

(04622) 5-61-70